Universidad de La Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias
Departamento de Matemática y Estadística

EXAMEN DE CALIFICACIÓN 2019
DOCTORADO
PRIMERA PARTE

1) (a) Sea p primo tal que $p \equiv 2(3)$. Pruebe que el polinomio
$$x^2 - x + 1$$
es irreducible en $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

(b) Sea q primo tal que $q \equiv 2(5)$ ó $q \equiv 3(5)$. Pruebe que el polinomio
$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$
es irreducible en $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$.

2) Demuestre que si $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable tal que
$i)$ $\lim_{x\to\infty} f(x) = a < \infty$.
$ii)$ f' es uniformemente continua,
entonces
$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0.$$

3) Considere el anillo $R = \mathbb{Z}[x]$ e I el ideal generardo por los dos elementos (x^2+1) y por 5. Pruebe que I no es maximal en R.

4) Sea E/F una extensión algebraica y D un dominio de integridad tal que
$$F \subseteq D \subseteq E.$$
Probar que D es un cuerpo.

5) Sea C una componente por caminos de X y sea $x_0 \in C$ un punto base. Demostrar que la inclusión $C \to X$ induce un isomorfismo de grupos fundamental $\pi_1(C; x_0) \to \pi_1(X; x_0)$.

Universidad de La Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias
Departamento de Matemática y Estadística

EXAMEN DE CALIFICACIÓN 2019
DOCTORADO
SEGUNDA PARTE

1) Sean p_1, p_2, p_3 primos distintos entre sí y $F = \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \sqrt{p_3})$. Sean q_1, q_2 primos distintos entre sí y distintos de p_1, p_2 y p_3.

   Pruebe que $\sqrt{q_1 \cdot q_2} \notin F$

2) Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Sea $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ una contracción estricta. Se define $f(x) = x + \varphi(x)$ para $x \in U$.

   a) Probar que f es inyectiva.

   b) Probar que $f^{-1} : f(U) \to U$ es continua.

3) Sea S^2 la 2-esfera unitaria en $\mathbb{R}^3$ centrada en el origen. Considere la relación de equivalencia en $X = S^2 \times [0;1]$ definida por

$$(x,i) \sim (y,j) \iff \quad x = y, \quad i = 0 \quad \wedge \quad j = 1.$$

   (a) Demostrar que $Y = X/\sim$ es compacto y conexo.
   (b) Hallar $\pi_1(Y)$.

4) Sea R un anillo con 1, no necesariamente conmutativo. Recordemos que $e \in R$ es un elemento idempotente de R, si se cumple que $e^2 = e$, y un elemento $0 \neq r \in R$ es un divisor de cero si existe $0 \neq s \in R$ tal que $rs = 0$ ó $sr = 0$. Asumamos que R tiene un nil-ideal N (cada elemento de N es nilpotente) tal que R/N no tiene divisores de 0.

   (a) Muestre que lo únicos elementos idempotentes de R son el 0 y el 1.

   (b) Si R/N es una anillo de división. Pruebe que todo divisor de zer en R es nilpotente.

5) Sea p un primo. Clasifique todos los grupos finitos de orden p^3.